’16 後期　理系 ❷

提出　　　年　　月　　日　名前

3 点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)$, $\mathrm{A}\left(a\,,\,a^2\right)$, $\mathrm{B}\left(b\,,\,b^2+1\right)$ を考える.

(1) a が $0<a<2$ をみたすとき, $\triangle\mathrm{OAB}$ が不等式

$$x^2 \leqq y \leqq x^2+1$$

の表す領域に含まれるための b の条件を a を用いて表せ.

(2) $a,\ b$ が (1) の条件をみたすとき, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の最大値とそのときの $a,\ b$ の値を求めよ.

'16 後期　理系　❷

3 点 $\mathrm{O}(0\,,\,0)$, $\mathrm{A}\big(a\,,\,a^2\big)$, $\mathrm{B}\big(b\,,\,b^2+1\big)$ を考える.

(1) a が $0<a<2$ をみたすとき, $\triangle$OAB が不等式

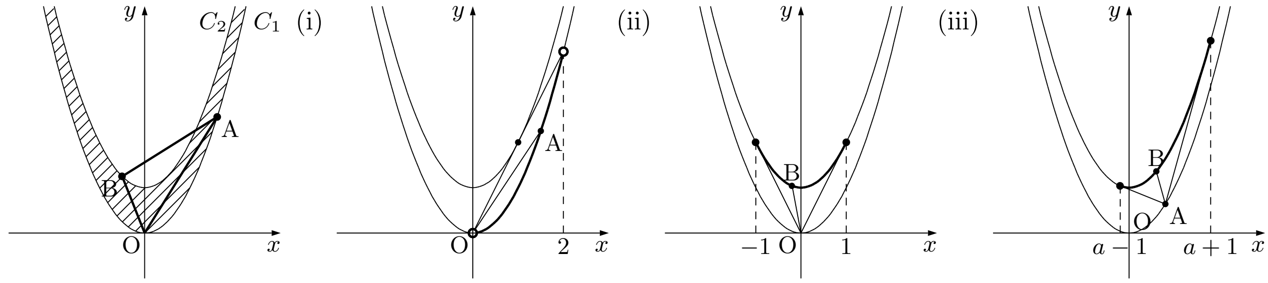
$$x^2 \leqq y \leqq x^2+1$$

の表す領域に含まれるための b の条件を a を用いて表せ.

(2) $a,\ b$ が (1) の条件をみたすとき, $\triangle$OAB の面積の最大値とそのときの $a,\ b$ の値を求めよ.

(1) $C_1: y=x^2,\ C_2: y=x^2+1,\ K: x^2 \leqq y \leqq x^2+1$ とおくと, K は図 1 の斜線部 (境界含む) となる.

(図 1)　(i)　(ii)　(iii)



(i) 2 点 O と $(2\,,\,4)$ を通る直線 $y=2x$ と C_2 の位置関係を調べると,
$(x^2+1)-2x=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$ より $x=1$ で接する.
$C_1,\ C_2$ は下に凸なので, a が $0<a<2$ を満たして動くとき, 図 (i) より線分 OA は K に含まれる.

(ii) $C_2: y=x^2+1$ において $y'=2x$ より,
C_2 の $x=t$ における接線 l_t の式は $y=2t(x-t)+t^2+1 \iff y=2tx-t^2+1$
l_t が O を通るとき, $0=-t^2+1 \iff (t+1)(t-1)=0 \iff t=\pm1$
$C_1,\ C_2$ が下に凸であることと合わせると, 図 (ii) より線分 OB が K に含まれる b の範囲は $-1 \leqq b \leqq 1$.

(iii) (ii) の l_t が A を通るとき, $a^2=2ta-t^2+1 \iff t^2-2at+a^2-1=0 \iff (t-a+1)(t-a-1)=0 \iff t=a\pm1$
$C_1,\ C_2$ が下に凸であることと合わせると, 図 (iii) より線分 AB が K に含まれる b の範囲は $a-1 \leqq b \leqq a+1$.

(i),(ii),(iii) より

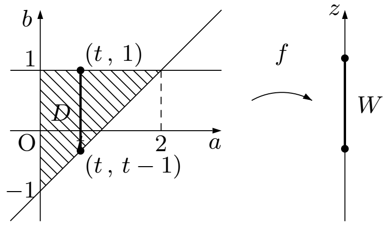
$$\triangle\text{OAB が } K \text{ に含まれる} \iff \begin{cases} 0<a<2 \\ -1 \leqq b \leqq 1 \\ a-1 \leqq b \leqq a+1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} 0<a<2 \\ a-1 \leqq b \leqq 1 \end{cases}} \quad (-1<a-1,\ 1<a+1 \text{ より})$$

'16 後期　理系 ❷

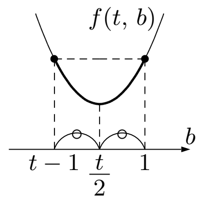
(2) $(\triangle\mathrm{OAB}\text{ の面積}) = \dfrac{1}{2}\left|a(b^2+1)-a^2b\right|$ であり, $f(a,\,b) = a(b^2+1)-a^2b$ とおく.

$D:\begin{cases} 0<a<2 \\ a-1 \leqq b \leqq 1 \end{cases}$ とし, ab 平面上の点 $(a\,,\,b)$ が D 内を動くときの, $z=f(a,\,b)$ の値域を W とする.

【方針 1】順像法



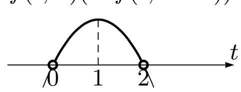
D 内で $a=t\ (0<t<2)$ と固定すると,
b の範囲は $t-1 \leqq b \leqq 1$ であり,



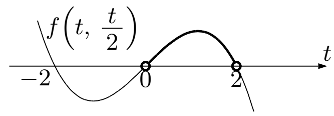
b の関数 $z=f(t,\,b)=tb^2-t^2b+t=t\left(b-\dfrac{t}{2}\right)^2-\dfrac{t^3}{4}+t$
のとる値の範囲は, 右図より

$$f\left(t,\ \frac{t}{2}\right) \leqq f(t,\,b) \leqq f(t,\,1)\ (=f(t,\,t-1))$$
$$\Longleftrightarrow -\frac{t^3}{4}+t \leqq f(t,\,b) \leqq -t^2+2t$$

次に t を $0<t<2$ で動かすと,



(i) $f(t,\,1)=f(t,\,t-1)=-t(t-2)$ の最大値は
右図より $f(1,\,1)=f(1,\,0)=1$

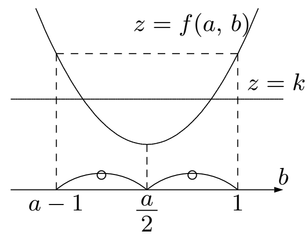


(ii) $f\left(t,\ \dfrac{t}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}t(t+2)(t-2)$ は
右図より最小値を持たず, 下限が 0

(i),(ii) より $W: 0<f(a,\,b) \leqq 1$ なので,
$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の最大値は $\dfrac{1}{2}|\,1\,| = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ であり, $\boxed{(a,\,b)=(1,\,0),\ (1,\,1)}$ のときである.

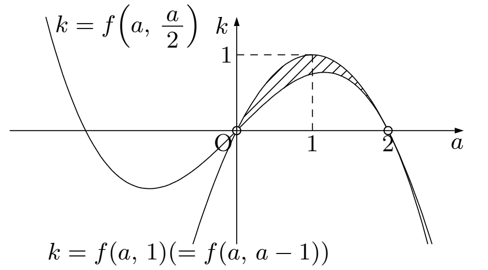
【方針 1】逆像法

$$\begin{aligned} k\in W &\Longleftrightarrow \exists\,(a,\,b)\,(\in D),\ k=f(a,\,b) \\ &\Longleftrightarrow \exists\,a,\,b,\ \begin{cases} k=ab^2-a^2b+a \\ 0<a<2 \wedge a-1 \leqq b \leqq 1 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \exists\,a\,(0<a<2),\ [\,b\text{ の 2 次方程式 } ab^2-a^2b+a=k \text{ が } a-1\leqq b\leqq 1 \text{ に解を持つ}\,]\cdots ☆ \end{aligned}$$



$f(a,\,b)=a\left(b-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^3}{4}+a$ であり,
$a>0$ より bz 平面の $z=f(a,\,b)$ のグラフは下に凸の放物線になるので右図より,

$$☆ \Longleftrightarrow \exists\,a\,(0<a<2),\ \left[\,f\left(a,\ \frac{a}{2}\right) \leqq k \leqq f(a,\,1)(=f(a,\,a-1))\,\right]$$
$$\Longleftrightarrow \exists\,a\,(0<a<2),\ \left[\,-\frac{a^3}{4}+a \leqq k \leqq -a^2+2a\,\right]\cdots ☆'$$



$$\begin{aligned} (-a^2+2a)-\left(-\frac{a^3}{4}+a\right)=0 &\Longleftrightarrow a^3-4a^2+4a=0 \\ &\Longleftrightarrow a(a-2)^2=0 \\ &\Longleftrightarrow a=0,\ 2 \end{aligned}$$

$f(a,\,1)=f(a,\,a-1)=-a(a-2)$
$f\left(a,\ \dfrac{a}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}a(a+2)(a-2)$
なので, 右図より
$☆' \Longleftrightarrow 0<k\leqq 1$

よって $W: 0<f(a,\,b)\leqq 1$ なので, $\triangle\mathrm{OAB}$ の面積の最大値は $\dfrac{1}{2}|\,1\,| = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ である.

また, $f(a,\,b)=1$ となるのは $f(a,\,1),\ f(a,\,a-1)$ において $a=1$ のとき, すなわち $f(1,\,1)=f(1,\,0)=1$ なので,
$\boxed{(a,\,b)=(1,\,0),\ (1,\,1)}$ のときである.