

'12 後期 理系 ④

提出 年 月 日 名前

次の問に答えよ.

(1)  $x \leq 0$  のとき,  $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$  であることを示せ.

(2)  $n$  を自然数とする. 正の数  $a$  が  $a^{10^n} = \frac{1}{2}$  を満たすとき, 不等式

$$e^{-0.70 \times 10^{-n}} < a < e^{-0.69 \times 10^{-n}}$$

を示せ. 必要ならば, 2 の自然対数  $\log 2$  が  $0.69 < \log 2 < 0.70$  を満たすことを用いてもよい.

(3) (2) で与えた  $a$  について, 不等式

$$0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 3 < a < 0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 4$$

を示せ. ここで,  $0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 3$  は, 小数点以下に 9 が  $n$  個続き, その次に 3 が現れる小数である.

'12 後期 理系 ④

次の問に答えよ。

(1)  $x \leq 0$  のとき,  $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$  であることを示せ.

(2)  $n$  を自然数とする. 正の数  $a$  が  $a^{10^n} = \frac{1}{2}$  を満たすとき, 不等式

$$e^{-0.70 \times 10^{-n}} < a < e^{-0.69 \times 10^{-n}}$$

を示せ. 必要ならば, 2 の自然対数  $\log 2$  が  $0.69 < \log 2 < 0.70$  を満たすことを用いてもよい.

(3) (2) で与えた  $a$  について, 不等式

$$0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 3 < a < 0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 4$$

を示せ. ここで,  $0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 3$  は, 小数点以下に 9 が  $n$  個続き, その次に 3 が現れる小数である.

(1)  $f(x) = e^x - (x + 1)$  とおくと,

$$\begin{cases} x \leq 0 \text{ のとき } f'(x) = e^x - 1 \leq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \text{ より, } x \leq 0 \text{ のとき } f(x) \geq 0 \iff x + 1 \leq e \text{ ①}$$

$g(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) - e^x$  とおくと,

$$\begin{cases} x \leq 0 \text{ のとき } g'(x) = 1 + x - e^x = -f(x) \leq 0 \text{ (①より)} \\ g(0) = 0 \end{cases} \text{ より, } x \leq 0 \text{ のとき } g(x) \geq 0 \iff e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} \text{ ②}$$

①, ② より  $x \leq 0$  のとき,  $1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$  が示された.

(2)  $0.69 < \log 2 < 0.70 \iff e^{0.69} < 2 < e^{0.70}$  ( $Y = e^X$  は単調増加なので)

$$\iff e^{-0.70} < \frac{1}{2} < e^{-0.69} \quad (e^{0.69}, e^{0.70} > 0 \text{ なので})$$

$$\iff e^{-0.70} < a^{10^n} < e^{-0.69}$$

$$\iff e^{-0.70 \times 10^{-n}} < a < e^{-0.69 \times 10^{-n}} \quad (X > 0 \text{ において } Y = X^{10^{-n}} \text{ は単調増加なので})$$

(3)  $-0.70 \times 10^{-n} \leq 0$  なので (1) より

$$e^{-0.70 \times 10^{-n}} \geq 1 - 0.70 \times 10^{-n} = 0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 3 \cdots \text{ ③}$$

$-0.69 \times 10^{-n} \leq 0$  なので (1) より

$$\begin{aligned} e^{-0.69 \times 10^{-n}} &\leq 1 - 0.69 \times 10^{-n} + \frac{(-0.69 \times 10^{-n})^2}{2} \\ &= 1 - 0.69 \times 10^{-n} + \frac{0.69^2 \times 10^{-n}}{2} \times 10^{-n} \\ &< 1 - 0.69 \times 10^{-n} + \frac{1^2 \times 10^{-1}}{2} \times 10^{-n} \quad (n \in \mathbb{N} \text{ より}) \\ &= 1 - 0.69 \times 10^{-n} + 0.05 \times 10^{-n} \\ &< 1 - 0.69 \times 10^{-n} + 0.09 \times 10^{-n} \\ &= 1 - 0.60 \times 10^{-n} \\ &= 0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 4 \cdots \text{ ④} \end{aligned}$$

(2) の結果および ③, ④ より  $0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 3 < a < 0.\underbrace{9 \cdots 9}_n 4$  が示された.