$\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} x\,dx$ の意味なんか分かっているという方へ.

では $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} x = \boxed{?}$, $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} x(dx)^2 = \boxed{?}$

「微分の逆」これを積分の定義と思っていませんか？

定義と定理をあいまいにしていては, ちょっと見たことのないものが出てくるだけで対処できなくなってしまうのです.

土台の理解

定積分の式中の部分部分にはきちんと意味があります.
例えば右図において

$$\int_{x=0}^{x=1} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_k \Delta x_k$$

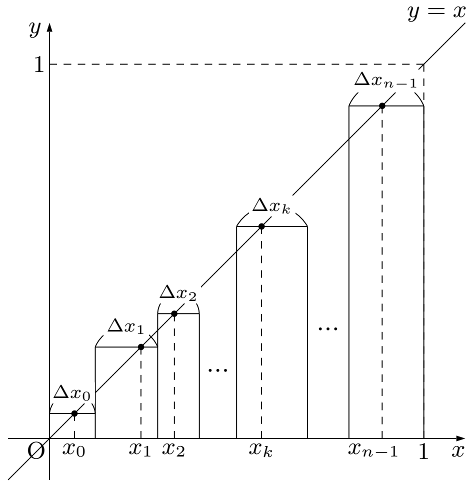
がこの定積分の定義であり,

$$\lim_{n\to\infty} \text{ のもとで } \begin{cases} \displaystyle\int_{x=0}^{x=1} & \text{は} & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \\ x & \text{は} & x_k \\ dx & \text{は} & \Delta x_k \end{cases}$$

をそれぞれ意味しているのです.
さらに $x=0$ から $x=1$ までを n 等分すれば $\Delta x_k = \dfrac{1}{n}$ となり, $x_k = \dfrac{k}{n}$ を選ぶと

$$\int_{x=0}^{x=1} x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\cdot\frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = \frac{1}{2}$$

を得ます.



(i)【定義から】

$$\int_{x=0}^{x=1} x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_k = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = +\infty$$

【その意味は？】

0 から 1 までの間にある全ての実数を足しあわせることを意味し, その和が $+\infty$ に発散することを示しています.

(ii)【定義から】

$$\int_{x=0}^{x=1} x(dx)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} x_k(\Delta x_k)^2 = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)}{2} = 0$$

【その意味は？】

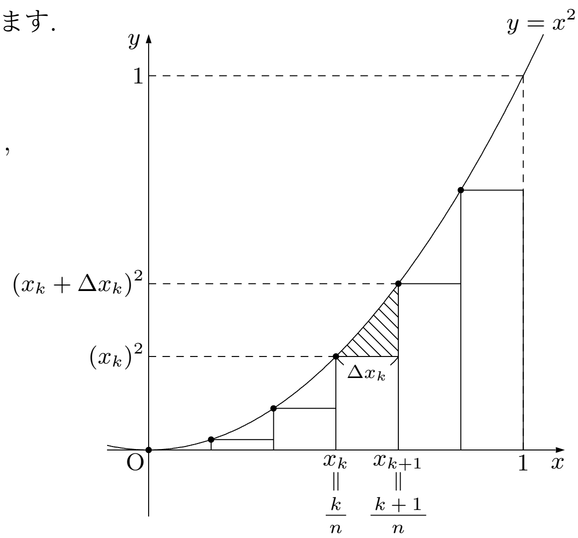
この不思議な定積分は $y=x^2$ のグラフの中に見つけることができます.
曲線 $y=x^2$, x 軸および直線 $x=1$ で囲まれた部分の面積を S とします.
まず

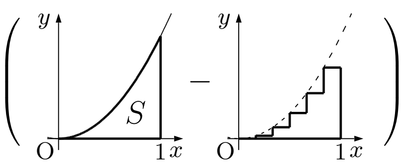
$$x_k(\Delta x_k)^2$$

とは右図の斜線部分の面積を三角形の面積で近似したものですから,
これを足しあわせ, 分割を果てしなく細かくした

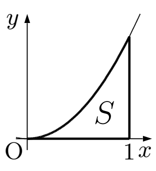
$$\int_{x=0}^{x=1} x(dx)^2$$

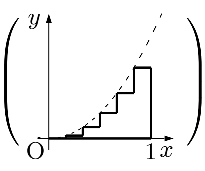
とは, ちょうど



$\displaystyle\lim_{n\to\infty}$ 

を意味します.
さて, 上の計算結果はこの誤差が 0 であることを示しています.
これはつまり,



$= \displaystyle\lim_{n\to\infty}$ 

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)^2\frac{1}{n} = \int_{x=0}^{x=1} x^2\,dx$$

のように, 誤差の心配をせずリーマン積分 $\displaystyle\int_{x=0}^{x=1} x^2\,dx$ で面積 S が求められることを保証しているのです.

連立方程式の解き方なんか分かっているという方へ.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \quad \boxed{} \quad x^2 - 2x = x$$

$\boxed{}$ にふさわしいのは $\Longleftrightarrow$, $\Longrightarrow$, $\Longleftarrow$ のどれ?

「$\Longleftrightarrow$」を「式変形のときに使う記号」程度に考えて何でも結んでしまっていませんか？
そんないい加減に使えるシロモノではないのです.

土台の理解

例えば 2 つの条件 P, Q をそれぞれ

P :「x は札幌にいる」, Q :「x は北海道にいる」

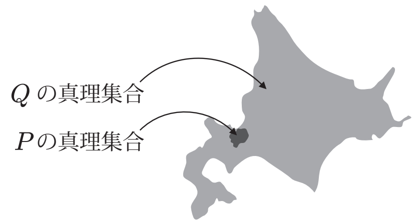
とすると,

$$\begin{cases} \text{札幌にいるためには少なくとも北海道にいなくちゃいけない} \\ \text{北海道にいるためには別に札幌にいなくてもいい} \end{cases} \quad \text{つまり} \begin{cases} P\ \text{にとって}\ Q\ \text{は必要} \\ Q\ \text{にとって}\ P\ \text{は必要じゃない} \end{cases}$$

というように

$$P \Longrightarrow Q$$

が成り立つことが分かります.
そしてこのとき



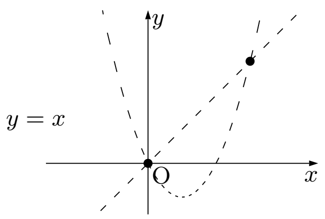
$$(P\ \text{の真理集合}) \subset (Q\ \text{の真理集合})$$

が成り立ちます.
この関係から逆に真理集合の包含関係を調べることによって条件同士の関係を突き止めることができるのです.

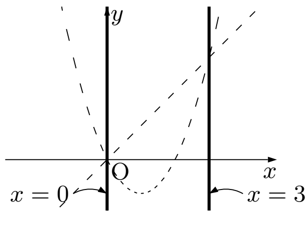
$$P : \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases}, \ Q : x^2 - 2x = x$$

とすると,
$y = x^2 - 2x$

P の真理集合は
$y = x^2 - 2x,\ y = x$ の両方を真にする $(x\,,\,y)$,
すなわち 2 つのグラフの共有点となるので下の 2 点です.



Q の真理集合は
$x^2 - 2x = x \Longleftrightarrow x = 0,\ 2$ を真にする $(x\,,\,y)$,
すなわち xy 平面上では下の 2 直線です.



よって

$$(P\ \text{の真理集合}) \subset (Q\ \text{の真理集合})$$

という関係が成り立つので

$$P \Longrightarrow Q$$

がふさわしいと分かるのです.

【因みに $\cdots$】

$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases}$ の「$\Longleftrightarrow$」で結ぶ正しい変形の例は

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = x \\ y = x \end{cases} \ \text{や} \begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = x \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$$

などですが納得できますか？ 真理集合を描いて確認してみてください.