問) $x>0$ のとき, $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ の値域を求めよ.

解) $x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ なので相加相乗平均の不等式より $f(x)\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ であり,

$x=1$ のとき等号が成り立つので, $f(x)$ の値域は $f(x)\geqq 2$

上の答案の不備が分かりますか？

上の解答で言えているのは

「$f(x)$ がとる値の中で一番小さいのは 2 だ」

であって

「$f(x)$ は 2 以上の値の範囲をくまなく動く」

ではないのです.

もっと単純な例で考えてみましょう.

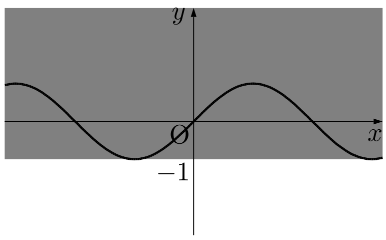
例えば $f(x)=\sin x$ に対して

「全ての実数 x に対して $f(x)\geqq -1$」

はもちろん正しいですが, かといって

「$f(x)$ の値域は $f(x)\geqq -1$」

は全くの嘘ですよね.



論証の Point

関数 f の値域がある範囲 W だと述べたい場合は

「f は W の中に入っている」

では不十分であり

「f は W 内をくまなく動く」

まで論証できているかが重要なのです.

(修正) $x>0,\ \dfrac{1}{x}>0$ なので相加相乗平均の不等式より $f(x)\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ であり,

$x=1$ のとき等号が成り立つ.

一方 $\boldsymbol{f(x)}$ は $\boldsymbol{x>0}$ において連続であり, $\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty}$

2 以上の値はどんなに大きい値でもとることの根拠.

以上より $f(x)$ の値域は $f(x)\geqq 2$

【因みに $\cdots$】

同様のことが軌跡の問題についても言えます.

論証の Point

点 P の軌跡がある図形 W だと述べたい場合は

「P は W の中に入っている」

では不十分であり

「P は W 内をくまなく動く」

まで論証できているかが重要なのです.

今までこの点を強く意識して答案作りをしていたかどうかを是非振り返ってみてください.