以下の等式を解釈できますか？

(1) ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n = 2^n$

(2) $({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2 = {}_{2n}\mathrm{C}_n$

(1)【解釈 1】

n 人を赤組, 白組の 2 グループに分ける. ただし, 一方のグループが 0 人でもよいとするとき,
以下の (i), (ii) の方法で, その場合の数を求める.

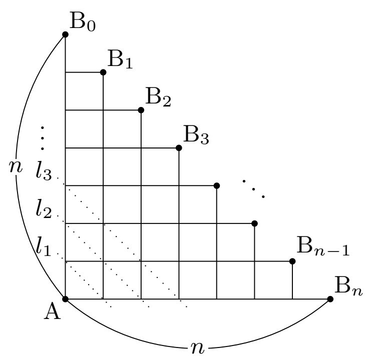
(i) 1 人目は赤か白かの 2 通り.
そのそれぞれに対し 2 人目も赤か白かの 2 通り.
そのそれぞれに対し $\cdots$
と考えることにより, 総数は 2^n 通り.

(ii) 赤組に入る人数で場合分けすると,
n 人中 0 人が赤組となるような分け方は ${}_n\mathrm{C}_0$ 通り.
n 人中 1 人が赤組となるような分け方は ${}_n\mathrm{C}_1$ 通り.
n 人中 2 人が赤組となるような分け方は ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り.
$\vdots$
n 人中 n 人が赤組となるような分け方は ${}_n\mathrm{C}_n$ 通り.
また, この $n+1$ 個の場合で漏れも重複もないので, 総数は ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$ 通り.

(i), (ii) は同じものを数えているので $2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$ が成り立つ.

【解釈 2】

点 A から $n+1$ 個の点 B_0, B_1, $\cdots$, B_n のどれか 1 点へ最短の経路で向かうとき,
以下の (i), (ii) の方法で, その場合の数を求める.



(i) A から点線 l_1 上の 2 点のどちらかへの移動の仕方は 2 通り.
そのそれぞれに対し点線 l_2 上の 3 点のどれかへの移動の仕方は 2 通り.
そのそれぞれに対し $\cdots$
と考えることにより, 総数は 2^n 通り.

(ii) たどり着く点で場合分けすると,
B_0 へのたどり着き方は ${}_n\mathrm{C}_0$ 通り.
B_1 へのたどり着き方は ${}_n\mathrm{C}_1$ 通り.
B_2 へのたどり着き方は ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り.
$\vdots$
B_n へのたどり着き方は ${}_n\mathrm{C}_n$ 通り.
また, この $n+1$ 個の場合で漏れも重複もないので, 総数は ${}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$ 通り.

(i), (ii) は同じものを数えているので $2^n = {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + {}_n\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n$ が成り立つ.

【因みに】

証明は, 二項定理 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k y^{n-k} = (x+y)^n$ において, $x = y = 1$ とすることによりできます.

(2)【解釈 1】

男 n 人, 女 n 人の $2n$ 人から n 人を選ぶとき,
以下の (i), (ii) の方法で, その場合の数を求める.

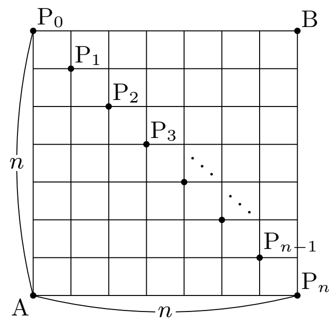
(i) 総数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通り.

(ii) 男女からそれぞれ選ぶ人数で場合分けすると,
男から n 人, 女から 0 人となる選び方は ${}_n\mathrm{C}_n \times {}_n\mathrm{C}_0 = ({}_n\mathrm{C}_0)^2$ 通り.
男から $n-1$ 人, 女から 1 人となる選び方は ${}_n\mathrm{C}_{n-1} \times {}_n\mathrm{C}_1 = ({}_n\mathrm{C}_1)^2$ 通り.
男から $n-2$ 人, 女から 2 人となる選び方は ${}_n\mathrm{C}_{n-2} \times {}_n\mathrm{C}_2 = ({}_n\mathrm{C}_2)^2$ 通り.
$\vdots$
男から 0 人, 女から n 人となる選び方は ${}_n\mathrm{C}_0 \times {}_n\mathrm{C}_n = ({}_n\mathrm{C}_n)^2$ 通り.
また, この $n+1$ 個の場合で漏れも重複もないので, 総数は $({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2$ 通り.

(i), (ii) は同じものを数えているので ${}_{2n}\mathrm{C}_n = ({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2$ が成り立つ.

【解釈 2】

点 A から点 B へ最短の経路で向かうとき,
以下の (i), (ii) の方法で, その場合の数を求める.



(i) 総数は ${}_{2n}\mathrm{C}_n$ 通り.

(ii) 途中に通過する点で場合分けすると,
P_0 を通過するものは $({}_n\mathrm{C}_0)^2$ 通り.
P_1 を通過するものは $({}_n\mathrm{C}_1)^2$ 通り.
P_2 を通過するものは $({}_n\mathrm{C}_2)^2$ 通り.
$\vdots$
P_n を通過するものは $({}_n\mathrm{C}_n)^2$ 通り.
また, この $n+1$ 個の場合で漏れも重複もないので, 総数は $({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2$ 通り.

(i), (ii) は同じものを数えているので ${}_{2n}\mathrm{C}_n = ({}_n\mathrm{C}_0)^2 + ({}_n\mathrm{C}_1)^2 + ({}_n\mathrm{C}_2)^2 + \cdots + ({}_n\mathrm{C}_n)^2$ が成り立つ.

【因みに】

証明は, 二項定理より $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n \iff \sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k x^k\right)^2$ が成り立つので,
両辺の x^n の係数比較によりできます.

【コメント】

これらの他にも

$r\,{}_n\mathrm{C}_r = n\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

${}_n\mathrm{C}_0 + {}_{n+1}\mathrm{C}_1 + {}_{n+2}\mathrm{C}_2 + \cdots + {}_{n+r}\mathrm{C}_r = {}_{n+r+1}\mathrm{C}_r$

などの ${}_n\mathrm{C}_r$ 関連の重要公式について, 証明はもちろんのこと解釈にも挑戦して場合の数の発想力を鍛えてください.