e^π を見積もれますか？

【解答例】

$$\begin{aligned} e^\pi &\approx 2.7^3 \\ &= 19.683 \end{aligned}$$

これでも見積もっていると言えなくはないですが, さすがに大雑把すぎるということで,

「$x \approx 0$ のとき $e^x \approx 1+x$」$\cdots$☆

を用います. すると,

$$\begin{aligned} e^\pi &\approx e^{3.14} \\ &= e^3 \cdot e^{0.14} \\ &\approx e^3 \cdot (1+0.14) \quad (☆より) \\ &\approx 2.7^3 \cdot 1.14 \\ &= 19.683 \cdot 1.14 \\ &= \boxed{22.43862} \quad (真の値は\ 23.14069\cdots) \end{aligned}$$

を得ます.

【解説】

「$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$」

は必ず習う有名極限公式ですが, これは

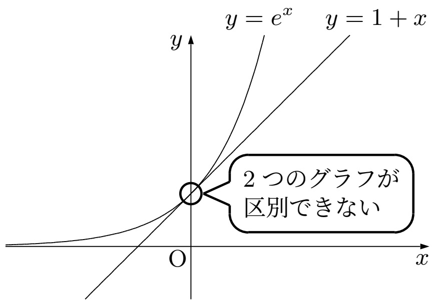
「$x \approx 0$ のとき $e \approx (1+x)^{\frac{1}{x}}$ すなわち $e^x \approx 1+x$」

と見ることができ, 図形的には

「曲線 $y = e^x$ は $x = 0$ 付近では直線 $y = 1+x$ とみなすことができる」

ということを意味しています.

そのため $e^{0.14} \approx 1+0.14$ とみなすことができたのです.



このように利用する感覚を持っていなければ, それは単にこの公式を「知っている」のであって「理解している」とは言えません.

e の理解

$\lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ や $\lim_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ などの e の表現を覚えるだけでは, どうしてこんな数が登場したのか理解できません.

ここで $y = e^x$ 以外の指数関数が $x = 0$ 付近でいったいどんな1次関数とみなせるのかをいくつか見てみると,

$x \approx 0$ のとき $2^x \approx 1 + (0.6931\cdots)x$

$x \approx 0$ のとき $3^x \approx 1 + (1.0986\cdots)x$

$x \approx 0$ のとき $10^x \approx 1 + (2.3025\cdots)x$

といった具合で傾きはどれもきたない数ばかりになってしまいます.

これを見ると, いかに e が特別な値であるかが実感できると思います.

e とは $x = 0$ 付近で $1+x$ という特別な1次関数とみなせるような指数関数の底.

であり, その値を求めた結果が $e = 2.71828\cdots$ なのです.

またこれを用いることにより,

$x \approx 0$ のとき $(\log 2)x \approx 0$ なので, $2^x = e^{(\log 2)x} \approx 1 + (\log 2)x$. つまり $0.6931\cdots = \log 2$

$x \approx 0$ のとき $(\log 3)x \approx 0$ なので, $3^x = e^{(\log 3)x} \approx 1 + (\log 3)x$. つまり $1.0986\cdots = \log 3$

$x \approx 0$ のとき $(\log 10)x \approx 0$ なので, $10^x = e^{(\log 10)x} \approx 1 + (\log 10)x$. つまり $2.3025\cdots = \log 10$

というように, 先ほどのきたない傾きを統一的な表現によって表すこともできるのです.

【+ α】

上の近似では誤差がどんな範囲に抑えられているのかはいっさい語りませんでした.

この近似が1次近似であるということが分かっている人にとっては 0.14 が $\frac{1}{10}$ 程度なので, 誤差は 0.14^2 すなわち $\frac{1}{100}$ 程度だろうということは分かります. また, より厳密な誤差評価のためには『テイラーの定理』までたどり着くのを待たなくてはなりません. テイラーの定理により, e^x は

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

という無限級数で表すことができ, 項を増やすほど近似誤差を小さくできることが分かります.

我々は, 皆さんが1つ1つの知識をバラバラに覚えるのではなく, 意味やつながりに気づく楽しさを感じながら学習を進めていくことを願っています.