

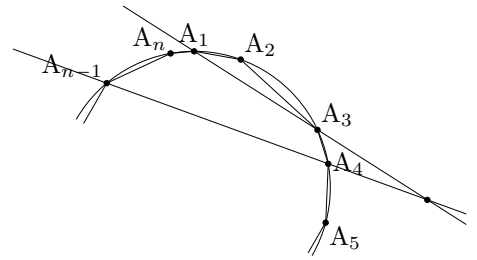
円に内接する凸 n 角形 P について、以下の間に答えよ。ただし、どの 2 直線も平行でなく、また、どの 3 直線も 1 点で交わらないものとし、 $n \geq 8$ とする。 P の対角線を延長してできる直線を引くとき、円外にできる交点の個数を求めよ。

P の n 個の頂点を $A_1, A_2, \dots, A_n$ とすると、例えば右図は P の対角線 A_1A_3 と A_4A_{n-1} が円外につくる交点を描いたものです。

このようにしてできる交点が何点あるかを数えるのは容易ではありません。

数え方の Point

「1 対 1 対応の利用」です。つまり、数えたい対象と 1 対 1 に対応しているもので数えやすいものに話をうまくすりかえるのです。



本問は、この「1 対 1 対応の利用」にある程度慣れている方むけの問題です。

以下のレベルの問題がすらすら答えられることを前提とします。

(1) 円に内接する凸 n 角形について対角線の交点の個数を求めよ。ただし、どの 3 直線も 1 点では交わらない。

(2) $1 \leq x \leq y \leq z \leq n$ ($n \in \mathbb{N}$) を満たす自然数 x, y, z の組の個数を求めよ。

(答) (1) nC_4 個, (2) $n+2C_3$ 個

では本問の解答です。4 頂点の選び方と交点の間の対応に注目をして数えます。

【解答】

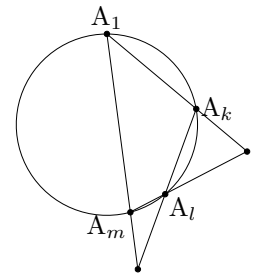
(i) 4 頂点全てが隣り合わないとき、4 頂点の選び方に対し 2 交点に対応する。

まず、4 点 A_1, A_k, A_l, A_m ($1 < k < l < m \leq n$) で 4 角形を作るとき、 k, l, m の満たす条件は

$$\begin{cases} k-1 \geq 2 \\ l-k \geq 2 \\ m-l \geq 2 \\ (n+1)-m \geq 2 \end{cases} \iff 0 \leq k-3 \leq l-5 \leq m-7 \leq n-8$$

であり、これを満たす整数 k, l, m の組の個数は ${}_{n-5}C_3$ 個。

A_1 が $A_2, \dots, A_n$ でも同様であり、これらの合計は同じ頂点の組を 4 重にカウントしているので交点の個数は $\left({}_{n-5}C_3 \cdot n \cdot \frac{1}{4}\right) \times 2$ 個。



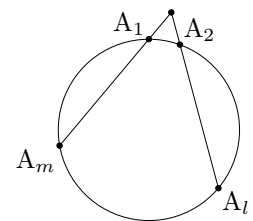
(ii) 2 頂点だけ隣り合うとき、4 頂点の選び方に対し 1 交点に対応する。

まず、4 点 A_1, A_2, A_l, A_m ($2 < l < m \leq n$) で 4 角形を作るとき、 l, m の満たす条件は

$$\begin{cases} l-2 \geq 2 \\ m-l \geq 2 \\ (n+1)-m \geq 2 \end{cases} \iff 0 \leq l-4 \leq m-6 \leq n-7$$

であり、これを満たす整数 l, m の組の個数は ${}_{n-5}C_2$ 個。

A_1 が $A_2, \dots, A_n$ でも同様であり、これらの合計は同じ頂点の組を重複してカウントしていないので交点の個数は $\left({}_{n-5}C_2 \cdot n\right) \times 1$ 個。



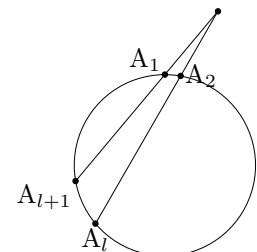
(iii) ちょうど 2 頂点ずつ隣り合うとき、4 頂点の選び方に対し 1 交点に対応する。

まず、4 点 A_1, A_2, A_l, A_{l+1} ($2 < l, l+1 \leq n$) で 4 角形を作るとき、 l の満たす条件は

$$\begin{cases} l-2 \geq 2 \\ (n+1)-(l+1) \geq 2 \end{cases} \iff 0 \leq l-4 \leq n-6$$

であり、これを満たす整数 l の個数は $n-5$ 個。

A_1 が $A_2, \dots, A_n$ でも同様であり、これらの合計は同じ頂点の組を 2 重にカウントしているので交点の個数は $\left((n-5) \cdot n \cdot \frac{1}{2}\right) \times 1$ 個。



$$(i), (ii), (iii) \text{ より求める交点の個数は } \frac{{}_{n-5}C_3 \cdot n}{2} + {}_{n-5}C_2 \cdot n + \frac{(n-5)n}{2} = \frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5) \text{ 個}$$

【メッセージ】

さて、この結果を見て「きれいな式だなあ」と思ったではありませんか？
複雑な計算の果てにたどり着いた結果が思いのほかシンプルになるということは『場合の数』や『確率』の分野ではよく起きます。それを見過ごしてしまつては思考力のレベルアップは図れません。
本問であれば

「 $\frac{1}{12}n(n-3)(n-4)(n-5)$ を例えば ${}_{n-3}C_3 \cdot \frac{n}{2}$ と表せる。」

「では場合分けをせずに求めることができるのではないか？」

「いったい何に交点を対応させているのか？」

「 $n-3$ とは何の個数か？」

：

と思考を巡らせることにより、新たな解法を自力で見つけることができます。(是非トライしてください)
良問と呼ばれる問題をいくら解いても、自分で掘り下げなければそれは単なる解法コレクターに過ぎません。
一問一問を考え抜くごとに一段一段賢くなろうとする生徒達に育つ授業を私たちは用意しています。